12 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Лопиталь ережесі. Тейлор формуласы. Маклорен формуласы, негізгі элементар функциялардың жіктелуі.

$f(x)$ функциясы X аралығында анықталып, $x_0 \in X$ нүктесінде $f(x_0), f'(x_0),..., f^{(n)}(x_0)$туындылары бар болсын. $f(x)$ функциясын жуықтау құралы ретінде сәйкес туындылары $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындыларымен беттесетін n дәрежелі көпмүшелікті, яғни

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

көпмүшелігін алайық. Ол $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі Тейлор көпмүшелігі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясы n дәрежелі көпмүшелік болса, онда әрбір $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ үшін $f(x) = P_n(x)$

Басқа жағдайларда ондай теңдік орындалмауы мүмкін, демек *қателік* немесе *қалдық мүше* деп аталатын

$$R_{n+1}(x; f) = f(x) - P_n(x)$$

функциясын қарауымыз қажетті.

$R_{n+1}(x; f)$ функциясының анықтамасынан шығатын

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x; f)$$

формуласын Тейлор формуласы деп атайды.

$x_0 = 0$ болғанда, Тейлор формуласы мына түрге келеді:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

Кейбір негізгі элементтар функциялардың Тейлор формуласымен жіктелуі:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n + \frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)(1+\theta x)^{\mu-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Тейлор формуласын жуықтап есептеуге қолданады.

Мысалы, е санын 0,001 дәлдігімен есептеу керек.

$f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

Тейлор формуласында $x = 1$ тең деп аламыз,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$0 < c < 1$, онда $e^c < 3$ және қалдық мүше $\frac{e^c}{(n+1)!}$<0.001, $n = 6$ деп алсақ, онда

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} < 0.001.$$

Сонымен,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Лопиталь ережесі.

Теорема $f(x)$ пен $g(x)$ $x = a$ нүктесінің маңайында (a – нүктесі алынып тасталуы да мүмкін) анықталған, дифференциалданатын және $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (немесе $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$), a – нүктесінің маңайында $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, шарттары орындалатын функциялар болсын. Онда егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

теңдігі орындалады.

Егер $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ өрнегі де $\left(\frac{0}{0}\right)$түріндегі анықталмағандық болып $f'(x)$, $g'(x)$ функциялары теорема шартын қанағаттандырса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$0\cdot\infty$, $0^{0,}$ ∞^0, $\infty - \infty$, 1^∞ түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0\cdot\infty$ анықталмағандығын

$\left(f(x)\cdot g(x),\ \mathrm{f(x)}\to 0, \mathrm{g(x)}\to\infty, \mathrm{x}\to a\ \right)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, ал $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ түріне әкеледі.

б) 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} $\left(f(x)^{g(x)}\right)$ анықталмағандықтарын түрлендірулер арқылы $0\cdot\infty$ түріне a - жағдайына келтіруге болады.

в) $\infty-\infty$ $(f(x)-g(x),\ \ \mathrm{f}\to+\infty,\ \ \mathrm{g}\to+\infty\ \ (x\to a))$ анықталмағандығын $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріне келтіруге болады.